Distribusi Variabel Random Gabungan Waktu Hidup Masa Mendatang (*Joint Distribution of Future Lifetime Random Variable)*

Sri Dewi Anugrawati
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, sridewi.anugrawati@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Variabel random waktu hidup masa mendatang memegang peranan penting dalam pemodelan aktuaria khususnya terkait dengan asuransi jiwa. Variabel random ini dapat digunakan mengitung peluang hidup, mati, laju kematian dan nilai harapan hidup seseorang. Aplikasi teori peluang dan asumsi saling bebas pada variabel ini dapat memudahkan kita dalam menghitung peluang survivalnya meskipun asumsi dependen juga telah banyak digunakan namun dengan metode berbeda seperti copula. Model jiwa tunggal dalam untuk variabel random waktu hidup masa mendatang yang sering juga disebut waktu sampai kematian (*time until failure*) ini dapat diperluas untuk n jiwa dengan menggunakan asumsi saling bebas.

Kata Kunci: *Distribusi survival, waktu hidup masa mendatang (future lifetime), distribusi gabungan, peluang kematian, peluang survival, fungsi kepadatan peluang dan laju kematian (force of mortality)*

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang aktuaria, terutama aplikasi bidang ini dalam industri asuransi jiwa, distribusi survival memegang peranan penting dalam pemodelan peluang survival seseorang atau grup. Model distribusi survival tunggal yang paling awal digunakan untuk menentukan peluang hidup dan mati seseorang kini dianggap tidak dapat digunakan jika kita ingin memodelkan distribusi survival dari 2 orang atau lebih khususnya dalam suatu grup (kelompok) eksposur. Oleh karena itu sangat penting untuk memperluas model distribusi survival dari yang semula hanya berupa *single life* menjadi *multiple life* dengan menggunakan distribusi gabungan dari waktu hidup masa mendatang (*future lifetime*)

2. VARIABEL RANDOM

Selain variabel random tunggal, terkadang kita bekerja dengan dua variabel random atau lebih sehingga dibutuhkan distribusi gabungan dari beberapa variabel tersebut

Independensi

Variabel-variabel random $X_1,\dots,X_n$ disebut saling bebas jika kejadian-kejadian $\{X_1 \le x_1\},\dots,\{X_n \le x_n\}$ saling bebas. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} F(x_1,\dots,x_n) &= F(x_1)\cdot\ldots\cdot F(x_n) \\ f(x_1,\dots,x_n) &= f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $F(x_n)$ dan $f(x_n)$ adalah distribusi peluang marginal dari variabel random x_n [6]

Peluang Bersyarat

Seperti yang kita ketahui, model-model peluang dalam aktuaria banyak menggunakan peluang bersyarat dikarenakan kejadian tertentu itu disyaratkan pada kejadian yang lain misalkan saja pembayaran santunan disyaratkan pada terjadinay kematian. Adapun $\Pr(A\,|\,B)$ didefiniskan sebagai berikut

$$\Pr(A\,|\,B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \tag{2.2}$$

dimana $\Pr(A \cap B)$ adalah peluang kejadian A dan B sama-sama terjadi [7]

3. MODEL SURVIVAL

Model survival adalah distribusi peluang untuk jenis variabel random khusus khususnya dalam ilmu aktuaria. Distribusi survival digunakan dalam pendefinisian konsep "*failure*" secara umum. [2]

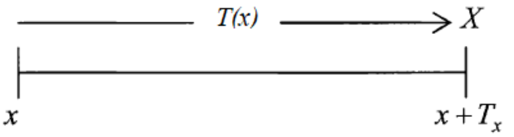
Usia Saat Kematian (*Age of Death*)

Misalkan X adalah variabel random usia saat suatu entitas mengalami "*failure*" atau dalam konteks asuransi jiwa adalah usia saat seseorang meninggal dunia (usia saat kematian).

Diasumsikan bahwa entitas tersebut harus hidup di usia 0 maka $X > 0$ [1]

Waktu sampai Kematian (*Time to Failure*)

Misalkan T adalah variabel random lama waktu dari usia 0 sampai kematian terjadi. Maka T disebut juga variabel random waktu sampai kematian (*time to failure*). Jika kematian terjadi tepat di usia x maka $X = x$ dan $T = x$. Jika entitas hidup sampai usia x dimana $x > 0$ maka variabel random waktu sampai kematian untuk x disimbolkan sebagai $T(x)$ dan $X = x + T$ seperti pada gambar berikut [2]



Gambar 1: Waktu sampai kematian

Waktu kematian dari suatu status (orang yang mengasuransikan dirinya) adalah fungsi dari waktu hidup masa mendatang (*future life time*) dari seseorang sehingga variabel random ini sering juga disebut sebagai variabel random waktu hidup masa mendatang (*future life time*) [2]

Fungsi Distribusi Survival

Fungsi distribusi survival untuk variabel random $T(x)$ disimbolkan dengan $S_{T(x)}(t)$ atau dalam notasi aktuaria disimbolkan dengan ${}_t p_x$ dimana

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= S_{T(x)}(t) \\ &= 1 - F_{T(x)}(t) \\ &= \Pr\left(T(x) > t\right),\ t \geq 0 \\ &= \Pr\left(X > x + t \mid X > x\right),\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Berdasarkan teori peluang untuk peluang bersyarat $\Pr(A \mid B)$ yang didefiniskan sebagai pada persamaan (........) dengan A adalah kejadian dimana $X > x + t$ dan B adalah kejadian dimana $X > x$ maka dapat dituliskan ${}_t p_x$ diinterpretasikan sebagai peluang seseorang berusia x akan bertahan hidup sampai usia $x + t$

$${}_t p_x = \frac{\Pr\left(X > x + t\right)}{\Pr(X > x)} = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \tag{3.2}$$ [2]

Jika (x) hidup selama t tahun dan meninggal u tahun kemudian, maka (x) akan meninggal antara usia $x + t$ dan $x + t + u$. Kejadian ini disimbolkan dengan ${}_{t|u} q_x$ dimana

$$\begin{aligned} {}_{t|u} q_x &= \Pr\left(t < T(x) \leq t + u\right) \\ &= {}_t p_x - {}_{t+u} p_x \end{aligned} \tag{3.3}$$

[1]

Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel random $T(x)$ dsimbolkan dengan $F_{T(x)}(t)$ atau dalam bidang aktuaria disimbolkan dengan ${}_t q_x$ dimana

$${}_t q_x = F_{T(x)}(t) = \Pr\left(T(x) \leq t\right),\ t \geq 0 \tag{3.4}$$

[1]

Jika dituliskan dalam model peluang bersyarat, distribusi ini dapat diformulasikan dalam nilai distribusi survivalnya yaitu

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= F_{T(x)}(t) = \Pr\left(X \leq x + t \mid X > x\right) \\ &= 1 - \Pr\left(X > x + t \mid X > x\right) \\ &= 1 - \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \\ &= \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

${}_t q_x$ diinterpretasikan sebagai peluang seseorang berusia x akan meninggal dalam t periode yang akan datang. Umumnya periode yang digunakan adalah tahunan. [2]

Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi kepadatan peluang untuk variabel random $T(x)$ dsimbolkan dengan $f_{T(x)}(t)$ dimana fungsi ini merupakan fungsi kepadatan peluang bersyarat untuk kematian di usia $x + t$ untuk seseorang (entitas) yang masih hidup sampai usia x, dimana

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt} F_{T(x)}(t) = -\frac{d}{dt} S_{T(x)}(t) = \frac{f_X(x+t)}{S_X(x)} \quad (3.6)$$

$F_{T(x)}(t)$ dan $S_{T(x)}(t)$ adalah peluang yang terkait dengan interval waktu tertentu sedangkan $f_{T(x)}(t)$ terkait dengan suatu titik waktu tertentu. $f_{T(x)}(t)$ adalah densitas dari kematian di usia $x+t$ dan karena itu disebut ukuran sesaat (*instantenous measure*) [2]

Fungsi Hazard (*Force of Mortality*)

Fungsi hazard adalah ukuran bersyarat pada hidupnya seseorang sampai usia x . Fungsi hazard ini yang juga disebut laju kematian untuk seseorang berusia x didefinisikan sebagai berikut

$$\mu_x = \lim_{dt \to 0^+} \frac{1}{dx} \Pr\left(T(0) \le x + dx \mid T(0) > x\right) \quad (3.7)$$

atau

$$\mu_x = \lim_{dt \to 0^+} \frac{1}{dx} \Pr\left(T(x) \le dx\right) \quad (3.8)$$

Untuk dx yang sangat kecil, $\mu_x dx$ dapat diinterpretasikan sebagai peluang seseorang yang telah berusia x meninggal sebelum mencapai usia $x + dx$ [4]

Adapun fungsi laju kematian di usia $x+t,\ t>0$ diformulasikan sebagai berikut

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} = -\frac{S'(x+t)}{S(x+t)} = \frac{f_X(x+t)}{S_X(x+t)} \quad (3.9)$$

Jika $f_{T(x)}(t)$ ukuran sesaat (*instantenous measure*) untuk kematian di usia $x+t$ maka fungsi ini adalah ukuran sesaat bersyarat (*conditional instantenous measure*) [2]

4. FUNGSI DISTRIBUSI SURVIVAL UNTUK WAKTU HIDUP MASA MENDATANG (*FUTURE LIFETIME*)

Waktu hidup masa mendatang (*future lifetime*) pada pembahasan kali ini menggunakan asumsi saling bebas (independen) meskipun sudah ada beberapa penelitian yang mengunakan model dependensi seperti copula. Penelitian tersebut diantaranya oleh Dufresne et al[...] mengenai aplikasi copula dalam pemodelan wakt hidup antara suami istri dengan mengunakan data dari perusahan asuransi di Kanada. Denuit dan dan Cornet juga telah melakukan penelitian dalam menghitung premi n jiwa dengan asumsi waktu hidup masa mendatang dimana keduanya menggunakan pendekatan *Frechet-Hoeffding bounds* serta model *Norberg's Markov*

Fungsi Distribusi Kumulatif Untuk n Variabel *Future Life Time*

Jika digunakan asumsi saling bebas maka Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel waktu hidup masa mendatang $T(x)$ untuk n jiwa berdasarkan persamaan (2.1) dituliskan sebagai berikut

$$F_{T(x_1)\ldots T(x_n)}(t_1,\ldots,t_n) = \Pr\left[T(x_1) \le t_1, \ldots, T(x_n) \le t_n\right] = F_{T(x_1)}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{T(x_n)}(t_n) \quad (4.1)$$

Nilai ini menggambarkan peluang dari sekelompok jiwa (n jiwa) akan meninggal dalam

t_j periode yang akan datang dengan $j = 1, 2, .., n$

Fungsi Distribusi Survival Untuk n Variabel *Future Life Time*

Distribusi survival, seperti yang kita ketahui, merupakan komplemen dari distribusi kumulatif dimana

$$F_X(t) = 1 - S_X(t) \quad (4.2)$$

Oleh karena itu dengan menggunakan asumsi saling bebas dapat dituliskan distribusi survival untuk n variabel waktu hidup masa mendatang untuk n jiwa sebagai berikut

$$S_{T(x_1)\dots T(x_n)}(t_1,\dots,t_n) = \Pr\left[T(x_1) > t_1,\dots, T(n_n) > t_n\right] \quad (4.3)$$
$$= S_{T(x_1)}(t_1)\cdot\dots\cdot S_{T(x_n)}(t_n)$$

Nilai ini menggambarkan peluang dari sekelompok jiwa (n jiwa) berusia x_j akan bertahan hidup sampai t_j periode yang akan datang dengan $j = 1,2,..,n$.

Fungsi Kepadatan Peluang Untuk n Variabel *Future Life Time*

Fungsi kepadatan peluang untuk n variabel waktu hidup masa (n jiwa) sebagai berikut

$$f_{T(x_1)\dots T(x_n)}(t_1,\dots,t_n) = f_{T(x_1)}(t_1)\cdot\dots\cdot f_{T(x_n)}(t_n) \quad (4.4)$$

dengan persamaan dari $f_{T(\dots)}(\dots)$ dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.6)

Fungsi Hazard Rate untuk n Variabel *Future Life Time*

Laju kematian atau (force of mortality) yang disebut juga fungsi hazard rate untuk n variabel waktu hidup masa (n jiwa) sebagai berikut

$$\mu_{T(x_1)\dots T(x_n)}(t_1,\dots,t_n) = \mu_{T(x_1)}(t_1)\cdot\dots\cdot \mu_{T(x_n)}(t_n) \quad (4.4)$$

dengan $\mu_{T(x_n)}(t_n)$ dapat ditentukan melalui persamaan (3.9)

5. CONTOH dan PEMBAHASAN

Misalkan kematian dari 1 kelompok pengamatan berjumlah 3 orang diasumsikan berdistribusi seragam. Seperti kita ketahui fungsi kepadatan peluang untuk distribusi seragam terdefinisi pada interval [a,b] seperti berikut

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a},\ a \le x \le b \quad (5.1)$$

Untuk kasus khusus yaitu waktu sampai kematian, $a = 0$ maka dalam hal ini, distribusi seragam dapat dituliskan sebagai berikut

$$f_X(x) = \frac{1}{\omega},\ 0 \le x \le \omega \quad (5.2)$$

dengan

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\omega}dy = \frac{x}{\omega} \quad (5.3)$$

dan

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \frac{\omega - x}{\omega} \quad (5.4)$$

Selanjutnya akan ditentukan distribusi peluang untuk 10 tahun ($t = 10$) yang akan datang dari suatu kelompok pengamatan tersebut dimana ketiganya berusia 30, 40, dan 50 tahun. Jika batasan usia pengamatan adalah 100 tahun, maka $\omega = 100$.

Peluang kematian

Dengan menggunakan persamaan (3.5) dan (5.3) maka diperoleh

$$F_{T(30)}(10) = \frac{F(30+10) - F(30)}{1 - F(30)} = 0{,}143$$

$$F_{T(40)}(10) = \frac{F(40+10) - F(40)}{1 - F(40)} = 0{,}167$$

$$F_{T(50)}(10) = \frac{F(50+10) - F(50)}{1 - F(50)} = 0{,}2$$

Dengan asumsi waktu sampai kematian dari ke-3 orang tersebut saling bebas, maka berdasarkan persamaan (4.1) diperoleh

$$F_{T(30)T(40)T(50)} = {}_{10}q_{30;40;50} = 0{,}005$$

Hal ini berarti peluang ketiga orang tersebut akan meninggal 10 tahun kemudian jika kematian berdistribusi seragam adalah 0,5%

Peluang hidup (Survival)

Dengan menggunakan persamaan (3.1) maka diperoleh

$$S_{T(30)}(10) = \frac{S(30+10)}{S(30)} = 0{,}857$$

$$S_{T(40)}(10) = \frac{S(40+10)}{S(40)} = 0{,}833$$

$$S_{T(50)}(10) = \frac{S(50+10)}{S(50)} = 0{,}8$$

Dengan asumsi waktu sampai kematian dari ke-3 orang tersebut saling bebas, maka berdasarkan persamaan (4.3) diperoleh

$$S_{T(30)T(40)T(50)}(10) = {}_{10}p_{30;40;50} = 0,571$$

Hal ini berarti peluang ketiga orang tersebut akan hidup 10 tahun kemudian jika kematian berdistribusi seragam adalah 57,1%

Fungsi Kepadatan Peluang

Berdasarkan persamaan (3.6) dan (5.2) diperoleh

$$f_{T(30)}(10) = \frac{f(30+10)}{S(30)} = 0,024$$

$$f_{T(40)}(10) = \frac{f(40+10)}{S(40)} = 0,033$$

$$f_{T(50)}(10) = \frac{f(50+10)}{S(50)} = 0,05$$

Sehingga berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh fungsi kepadatan peluang untuk ke-3 orang tersebut adalah

$$f_{T(30);T(40);T(50)}(10) = 0,00000396$$

Jadi densitas bersyarat untuk kematian di tahun ke-10 untuk orang-orang berusia 30, 40, dan 50 tahun sebesar 0,00000396

Laju Kematian

Berdasarkan persamaan (3.9), (5.2), dan (5.4) diperoleh

$$\mu_{30}(10) = \frac{f(40)}{S(40)} = 0,028$$

$$\mu_{40}(10) = \frac{f(50)}{S(50)} = 0,04$$

$$\mu_{50}(10) = \frac{f(60)}{S(60)} = 0,063$$

Sehingga berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh laju kematian untuk ke-3 orang tersebut adalah

$$\mu_{30;40;50}(10) = 0,0000706$$

Jadi peluang orang -orang berusia 30,40, dan 50 tahun meninggal 10 tahun kemudian adalah 0,0000706 dt . Jika kita misalkan dt adalah 1 hari atau 0,00274 tahun maka nilai pendekatan dari peluang kematian dari ketiga orang tersebut 10 tahun yang akan datang adalah $0,0000706 \times 0,00274$ atau sebesar 2×10^{-7}

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D.A. dan Nesbitt, C. J. 1997. *Actuarial Mathematics, 2nd edition*. Itasca: Society of Actuaries.

[2] Cunningham, R. J., Herzorg, T.N., dan London, R. L. 2006. *Model For Quantifying Risk 2nd Edition*. Winstead: ACTEX Publication

[3] Denuit, M., dan Cornet, A. 1999. Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes. *Journal of Actuarial Practice*. Vol.7

[4] Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., dan Water, H. R. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. New York: Cambridge University Press

[5] Dufresne, F., Hashorva. E., Ratovomirija. G., dan Toukouru, Y. 2018. On age difference in joint lifetime modelling with life insurance annuity applications. *Annals of Actuarial Science*, Vol. 12, part 2, pp. 350–371

[6] Papoulis, A dan Pillia, S. U. 2002. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes 4th edition*. New York: McGraw-Hill

[7] Ross, S., M. 2019. *Introduction to Probability Models 12th edition*. London: Academic Press